Epreuve 1 : $\mathcal{PSI}$

Session 2003

CORRIGÉ

I.ETUDE D'UN PREMIER EXEMPLE

1. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi .

2. (a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t \in [x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt > 0$, d'autre part : $\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in]x, +\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt < \varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-t}}{x}$, donc on a montré que , pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et d'une primitive $\displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

3. (a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, en effet d'aprés ce qui précède on peut affirmer que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$, de plus $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ au voisinage de 0 et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc $\displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt \sim \int_x^{1} \frac{1}{t}dt = \ln x$ au voisinage de 0, or $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{1} \frac{e^{-t}}{t}dt + K$ où $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$, donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et par suite $\psi : x \mapsto \varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi| \leq |\varphi(t)|$ et $t \mapsto |\psi|$ intégrable sur les deux intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc $t \mapsto e^{ixt}\psi(t)$ l'est aussi donc les intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ixt}\psi dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ixt}\psi(t)dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x) = I_1 + I_2$ a un sens. D'autre part : $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\psi(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(-t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixu}\varphi(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-ixt}\varphi(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt.$

   (c) Pour tout réel non nul x, on a à l'aide d'une intégration par parties $\widehat{\psi}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = \left[\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin xt}{x}dt =$ $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$, car d'aprés 2.a $|\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x}| \leq \dfrac{e^{-t}}{x} \to 0$, quand $t \to +\infty$ pour x fixé, et d'aprés ce qui précède $\varphi(t) \sim \ln t + K$ au voisinage de 0, donc $\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)\dfrac{\sin xt}{x}$ quand $t \to 0$ pour x fixé, comme $\dfrac{\sin xt}{x} \sim t$ quand $t \to 0$ pour x fixé, alors $\varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} \sim (\ln t + K)t$ quand $t \to 0$ pour x fixé et donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t)\dfrac{\sin xt}{x} = 0$, pour x fixé.

   Ainsi $\widehat{\psi}(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, avec $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \rho(x, t)dt$ telle que $\Phi(0) = 0$ et

$\rho(x,t)=\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0)=\Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}:t\mapsto e^{-t}\cos xt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque majorée par e^{-t}, intégrable sur $[0,+\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0)=\Phi'(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial\rho}{\partial x}(0,t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1.$

4. (a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(xt)dt$, pour tout $x>0$, puis on a : $\Phi'(x)=\Re e\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{ixt}=\Re e\int_0^{+\infty}e^{(ix-1)t}=\Re e\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_{t\to0}^{t\to+\infty}=-\Re e\left(\frac{1}{ix-1}\right)=\frac{1}{x^2+1}$. Notez bien que : $|e^{(ix-1)t}|=e^{-t}\to0$ quand $t\to+\infty$.

(b) D'aprés la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x)=\frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad\forall x>0$, donc $\Phi(x)=\arctan x+\lambda\quad\forall x>0$, de même $\Phi(x)=\arctan x+\mu\quad\forall x<0$, donc

$$\widehat{\psi}(x)=\begin{array}{cc}\frac{\arctan x+\lambda}{x} & \forall x>0\\ \frac{\arctan x+\mu}{x} & \forall x<0\\ 1 & \text{si } x=0\end{array}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lambda=\mu=0$ d'où le résultat.

II.UN AUTRE EXEMPLE

1. (a) $\displaystyle\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt=\frac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}$.

(b) $\displaystyle\int_0^A e^{\alpha t}\cos(\beta t)dt=\Re e\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\right)=\Re e\left(\frac{e^{(\alpha+i\beta)A}}{\alpha+i\beta}\right)=$ $e^{\alpha A}\Re e\left(\dfrac{(\cos(\beta A)+i\sin(\beta A))(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}\right)=e^{\alpha A}\dfrac{\alpha\cos(\beta A)+\beta\sin(\beta A)}{\alpha^2+\beta^2}$

De même : $\displaystyle\int_0^A e^{\alpha t}\sin(\beta t)dt=\Im m\left(\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}dt\right)=e^{\alpha A}\frac{\alpha\sin(\beta A)-\beta\cos(\beta A)}{\alpha^2+\beta^2}$.

(c) Pour p réel strictement positif, la fonction $t\mapsto e^{-pt}\cos\beta t$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par la fonction $t\mapsto e^{-pt}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cos(\beta t)dt=\lim_{A\longrightarrow+\infty}\int_0^A e^{-pt}\cos(\beta t)dt=\lim_{A\longrightarrow+\infty}e^{-pA}\frac{-p\cos(\beta A)+\beta\sin(\beta A)}{p^2+\beta^2}=0$, les exponentielles l'emportent sur les puissances.

2. La fonction $h:t\mapsto\dfrac{1}{\text{ch}t}$ est paire, pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, il suffit de le montrer au voisinage de ∞, en effet $\dfrac{1}{\text{ch}t}=\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}\sim_{+\infty}2e^{-t}$, qui est intégrable en $+\infty$, donc h aussi.

3. (a) $\widehat{h}(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\psi(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}h(t)dt+\int_{-\infty}^0\frac{1}{2}e^{ixt}h(-t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixu}h(u)du=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}h(t)dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixt}h(t)dt=2\int_0^{+\infty}h(t)\cos(xt)dt.$

(b) Pour tout réel u différent de 1 et tout entier naurel $n\geq1$, on a : $(1-u)\displaystyle\sum_{k=0}^n u^k=1-u^{n+1}$, donc $\dfrac{1}{1-u}=\displaystyle\sum_{k=0}^n u^k+\frac{u^{n+1}}{1-u}$, en particulier pour tout $t\geq0$, on a $h(t)=$

$\dfrac{1}{\text{ch }t} = 2\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2e^{-t}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}\right) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t} +$ $(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1-e^{-2t}}$ et donc pour tout réel x, on a : $\widehat{h}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\cos(xt)dt =$ $4\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt + 4(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt.$

(c) Pour tout réel x et tout entier naurel $n \geq 1$, on a :
$\Big|\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\Big| \leq \int_0^{+\infty}\Big|\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)\Big|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}dt = \dfrac{1}{2n+3}$
D'autre part : $\Big|\widehat{h}(x) - 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)dt\Big| = 4\Big|\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)dt\Big| \leq$ $\dfrac{4}{2n+3} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où : $\widehat{h}(x) = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\cos(xt)dt.$

(d) D'aprés la question II.1.c on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(x) = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

4. (a) Calcul des coefficients de Fourrier :
$a_n = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(nt)dt = 0$ car $t \mapsto u(t)\cos(nt)$ impaire sur $[-\pi,\pi]$, de même $t \mapsto u(t)\sin(nt)$ paire sur $[-\pi,\pi]$, alors
$b_n = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = 2\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(nt)dt = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\text{ch}(xt)\sin(nt)dt$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} e^{xt}\sin(nt)dt + \int_0^{\pi} e^{-xt}\sin(nt)dt\right)$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{x\pi}\dfrac{x\sin(n\pi) - n\cos(n\pi)}{x^2+n^2} + e^{-x\pi}\dfrac{-x\sin(n\pi) - n\cos(n\pi)}{x^2+n^2}\right) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^n n}{x^2+n^2}\text{ch}(x\pi).$

(b) **<u>Théorème</u>** : Si f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourrier converge simplement, et en tout point de continuité x de f, sa somme est égale à $f(x)$ et en tout point de discontinuité x de f, sa somme est égale à la demi-somme $\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2}$.
La fonction u vérifie bien les hypotèses du théorème et continue sur $]0,\pi[$, avec : $\dfrac{f_d(x)+f_g(x)}{2} = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \pi$, la série de Fourrier de la fonction u étant $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n \sin nt$, d'où $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n\sin nt = \text{ch}(xt) \quad \forall t \in]0,\pi[$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n \sin nt = 0$ pour $t = 0$ ou $t = \pi$.

(c) Pour $t = \frac{\pi}{2}$ ce développement devient : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_{2n+1}\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = \text{ch}(\dfrac{x\pi}{2})$ car $\sin 2n\frac{\pi}{2} = 0$, donc . $\text{ch}(\frac{x\pi}{2}) = \dfrac{\text{ch}(x\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$

5. D'aprés les questions II.3.d et II.4.c et la formule $\text{ch}\gamma = \text{ch}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$)

III.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**

(a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt}f(t)| \leq |f(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$, or f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; donc $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ l'est aussi d'où pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt$ est bien définie, en plus $|\widehat{f}(x)| = |\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = M$, constante qui ne dépond pas de x et donc la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

(b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est aussi continue .

2. **Transformations**

f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(at)$ sont aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et par suite possédent des transformés de Fourier, avec que pour tout réel x, $\widehat{f_a}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t-a)dt = e^{-iax}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}f(u)du = e^{-iax}\widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t-a$ et de même avec le changement de variable $v = at$ on obtient $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$, faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alors $-\infty$ devient $+\infty$ et inversement ce qui justifie le $|a|$.La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au point x est :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t}f(t)dt = \widehat{f}(x-a)$. Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(-u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixt}f(t)du = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt)f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u = -t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.
Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x) = 2i\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(xt)f(t)dt$. La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réelle alors que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3. **Dérivation**

(a) f' étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_{0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(0)$ admet une limite finie quad $x \longrightarrow +\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ est finie, soit L cette limite, si $L \neq 0$ alors $|f(x)| \longrightarrow |L| > \frac{|L|}{2}$, quand $x \longrightarrow +\infty$, or f est continue, donc un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $|f| > \frac{|L|}{2}$, or f est intégrable sur $[A, +\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera aussi, ce qui n'est pas le cas, donc $L = \displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, et de même on montre que $\displaystyle\lim_{-\infty} f = 0$.

(b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc admet une transformée de Fourrier, définie par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\widehat{f'}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f'(t)dt = \left[e^{-ixt}f(t)\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt = ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x) = \dfrac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour la fonction f'.

(c) Le fait que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ nous permet d'affirmer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dériver sous le signe intégral ; avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}tf(t)dt = -i\widehat{g}(x).$

FIN DE L'ÉPREUVE

FIN

© : www.chez.com/myismail
Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc

b) On a $I_n = -r_n$ donc, d'après 5.a) :

$$r_n = -\frac{(-1)^n}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

r_n est donc la somme de deux termes généraux de séries convergentes :

. la première est alternée convergente

. la deuxième à termes positifs $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge car $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

donc la série $\sum_{n\geq 1} r_n$ est convergente

PROBLEME :

$h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} = 0$. alors :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right) = 0$$

Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

Soit g la fonction définie par

$$g_u(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(u,t)$$

Alors g_u est C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t\in\mathbb{R}$ $g_u'(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,t) = 0$

donc $g_u(t) = c_u$ où $c_u \in \mathbb{R}$

Posons pour tout $u\in\mathbb{R}$ $c_u = F_1(u)$

Alors : $\frac{\partial h}{\partial u}(u,t) = F_1(u)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$

et comme h est de classe C^2 on a F_1 est de classe C^1

Soit alors k_v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k_v(t) = h(t,v)$

Alors $(\forall t\in\mathbb{R})$ $k_v'(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(t,v) = F_1(t)$

de sorte que : $k_v(u) = \int_0^u k_v'(t)\,dt + k_v(0)$

$$= \int_0^u F_1(t)\,dt + k_v(0)$$

$$= F(u) + G(v)$$

Donc : $h(u,v) = F(u) + G(v)$

F est visiblement de classe C^2 car F_1 est de classe C^1 et comme

$$G(v) = h(u,v) - F(u)$$

et que h est de classe C^2, on a G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement s'il existe F et G de $C^2(\mathbb{R})$ tel que $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$ $h(u,v) = F(u) + G(v)$

alors h est de classe C^2 car

$(u,v) \overset{p}{\longmapsto} u$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

et F de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, par composition $F\circ p$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

De même $(u,v) \overset{q}{\longmapsto} v$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

et G de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc $G\circ q$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, On a : $h = F\circ p + G\circ q$ donc h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

comme $h(u,v) = F(u) + G(v)$, on a

$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = F'(u)$ et $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}(F'(u)) = 0$

Conclusion:

On a démontré l'équivalence demandée.

2) a) $\psi : (x,t) \mapsto (u,v) = (x-ct, x+ct)$

ψ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$

car pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\psi(x,t) = x(1,1) + t(-c,c)$$

combinaison linéaire des vecteurs $(1,1)$ et $(-c,c)$.

Soit $(x,t) \in \ker\psi$ alors

$\begin{cases} x - ct = 0 \\ x + ct = 0 \end{cases}$ d'où $x = 0$ et $t = 0$

Ainsi $\ker\psi = \{(0,0)\}$ et ψ est injective.

donc ψ est un automorphisme ($\dim\mathbb{R}^2 = 2$)

b) Θ est bien définie car $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

donc pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, $f\circ\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

On a pour tout $(f,g) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Theta(f+\lambda g) = (f+\lambda g)\circ\phi$$
$$= (f\circ\phi) + \lambda(g\circ\phi) = \Theta(f) + \lambda\Theta(g)$$

Finalement Θ est bijectif car

$(\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2))(\forall g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2))$ $\Theta(f) = g$ ssi

$f\circ\phi = g$ ssi $f = g\circ\psi$, or $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

car ψ est linéaire donc

si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, g admet $f = g\circ\psi$ comme unique antécédant par Θ.

Ainsi Θ est bijectif.

Alors Θ est un automorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

3) a) on a $f^* = f\circ\phi$

Explicitons $\phi(u,v)$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$\phi(u,v) = (x,t) \iff \psi(x,t) = (u,v)$

$\iff \begin{cases} x - ct = u \\ x + ct = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ t = \frac{1}{2c}(v-u) \end{cases}$

Alors :

$$\phi(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(v-u)\right)$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

$$f^*(u,v) = f\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(v-u)\right)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)$$

avec $(x,t) = \phi(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(v-u)\right)$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u}(u,v)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,t)\right)$$
$$- \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,t) + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)\right) = 0$$

car on sait que f est solution de (1).

b) D'après A-1), il existe deux fonctions F et G éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que
$(\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2)\quad f^*(u,v) = F(u)+G(v)$
Alors, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a
$f(x,t) = f^*(u,v) = F(u)+G(v)$ où
$(u,v) = \psi(x,t) = (x-ct,\ x+ct)$, de sorte que :
$f(x,t) = F(x-ct)+G(x+ct)$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$.

4) Supposons qu'il existe $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, solution de (1), satisfaisant aux conditions (1) de l'énoncé :
D'après 3) b) $\exists F, G\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tq :
$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,t) = F(x-ct)+G(x+ct)$
Donc $f(x,0) = F(x)+G(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
D'après (1) : $\quad \varphi(x) = F(x)+G(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$
On a : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -cF'(x-ct)+cG'(x+ct)$
Donc :
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -cF'(x)+cG'(x) = 0$ (d'après (1))
donc :
$\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x) = G'(x)$
Alors $F+G=\varphi$ et $F'=G'$, donc
$F'=G'=\dfrac{\varphi'}{2}$ et $F+G=\varphi$

Alors, $\exists c_1, c_2$ constantes réelles tel que
$F = \dfrac{\varphi}{2}+C_1$ et $G = \dfrac{\varphi}{2}+C_2$
Comme $F+G=\varphi$, on a : $C_1+C_2 = 0$, donc
$\exists \gamma\in\mathbb{R}\quad F = \dfrac{\varphi}{2}+\gamma$ et $G = \dfrac{\varphi}{2}-\gamma$
Alors, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a :
$f(x,t) = F(x-ct)+G(x+ct)$
$= \frac{1}{2}\varphi(x-ct)+\gamma+\frac{1}{2}\varphi(x+ct)-\gamma$
Finalement :
(1) $\quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right)$

Réciproquement la fonction f définie par (1) est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et comme elle est définie par $f(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$ où $F=G=\dfrac{\varphi}{2}$ alors c'est une solution de l'equation aux dérivées partielles (I)
En outre, on a :
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x,0) = \frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(x)) = \varphi(x)$
$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2}c\,\varphi'(x-ct)+\frac{1}{2}c\,\varphi'(x+ct)$ donc
$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\frac{1}{2}c\,\varphi'(x)+\frac{1}{2}c\,\varphi'(x) = 0$ donc f satisfait les conditions initiales (1) de l'énoncé.
Le raisonnement ci-dessus montre que f est unique et donnée par la formule (1).

B) 1) $f(x,t)=g(x)h(t)$, alors, comme h et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a , pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=g''(x)h(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=g(x)h''(t)$$

Comme $g''=\lambda g$ et $h''=\lambda c^2 h$, on a , en remplaçant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=0$$

Donc f est une solution de (I)
2) Réciproquement, si $g,h\in C^2(\mathbb{R})$ tel que $(x,t)\mapsto g(x)h(t)$ est une solution de (I) non identiquement nulle, posons pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,t)=g(x)h(t)$$

Alors $\exists(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x_0,t_0)\neq 0$, donc $g(x_0)\neq 0$ et $h(t_0)\neq 0$.
Comme f est une solution de (I), on a :

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2 \quad g''(x)h(t)-\frac{1}{c^2}g(x)h''(t)=0$$

En particulier on a :

$$\begin{cases} (1) \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad g''(x)h(t_0)=\dfrac{1}{c^2}g(x)h''(t_0) \\ (2) \quad \forall t\in\mathbb{R} \quad g''(x_0)h(t)=\dfrac{1}{c^2}g(x_0)h''(t) \\ (3) \quad g''(x_0)h(t_0)=\dfrac{1}{c^2}g(x_0)h''(t_0) \end{cases}$$

Si on pose $\lambda=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{h''(t_0)}{h(t_0)}$ et $\lambda'=c^2\dfrac{g''(x_0)}{g(x_0)}$ on a d'après (3) la relation : $\lambda'=c^2\lambda$ et par suite on a d'après (1) et (2) :

$$\begin{cases} g''=\lambda g \\ h''=c^2\lambda h \end{cases}$$

3) a) L'équation $y''=\mu y$:
Si $\mu=0$, l'équation s'écrit : $y''=0$, donc les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t)=\alpha t+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Si $\mu > 0$ soit $\omega = \sqrt{\mu}$, l'équation devient
$$y'' = \omega^2 y$$
On sait que ses solutions sont
$$y(t) = \alpha \cosh \omega t + \beta \sinh \omega t$$
avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Si $\mu < 0$ et $\omega = \sqrt{-\mu}$, l'équation devient : $y'' + \omega^2 y = 0$ dont les solutions sont
$$y(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$
avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

b) si $\mu = 0$ on sait que
$$y(t) = \alpha t + \beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$
$$y(0) = y(a) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ et } \alpha a = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$
La fonction nulle est l'unique solution correspondant à ce cas

Si $\mu > 0$ avec $\omega = \sqrt{\mu}$
$$y(t) = \alpha \cosh \omega t + \beta \sinh \omega t$$
$$y(0) = \alpha = 0, \quad y(a) = \beta \sinh \omega a = 0$$
donc $\beta = 0$ car $\omega \neq 0$ Ainsi $y = 0$

Si $\mu < 0$ et $\omega = \sqrt{-\mu}$ alors
$$y(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$
$$y(0) = \alpha = 0$$
$$y(a) = \beta \sin \omega a = 0$$
Donc $\beta = 0$ ou $\omega a = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

comme $a > 0$ et $\omega > 0$ $k > 0$

donc $\omega = \dfrac{n\pi}{a}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

soit : $\mu = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Résumé :

Les réels μ pour lesquels on a les conditions demandées sont de la forme
$$\mu = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$
pour $n = 0$ on a $y(t) = 0$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ $y(t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{a} t\right)$

avec $\beta \in \mathbb{R}$

c) Si f est une solution stationnaire

on sait que f a la forme :

$$f(x,t) = g(x)\,h(t) \text{ où } g \text{ et } h$$

sont de classe C^2 solution des équations différentielles :

$$y'' = \mu y \qquad \text{pour } g$$
$$z'' = c^2 \mu z \qquad \text{pour } h$$

où $\mu \in \mathbb{R}$

la condition $f(0,t) = f(a,t) = 0$ s'écrit :

$$g(0)\,h(t) = g(a)\,h(t) = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$

1° cas si f est identiquement nulle alors c'est une solution qui satisfait les conditions demandées.

2° cas si $f \neq 0$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ $h(t) \neq 0$ donc $g(0) = g(a) = 0$ et d'après ce qui précède dans la question 3) b) ci-dessus $\exists n \in \mathbb{N}$ $\mu = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

et $g(x) = \beta \sin \frac{n\pi}{a} x$, $\beta \in \mathbb{R}$

on a h est solution de l'équation

⑧

différentielle $z'' = -\left(\frac{cn\pi}{a}\right)^2 z$

d'où :

$$h(t) = \alpha' \cos \frac{cn\pi}{a} t + \beta' \sin \frac{cn\pi}{a} t$$

De sorte que

$$(1) \quad f(x,t) = \beta \sin \frac{n\pi}{a} x \left(\alpha' \cos \frac{n\pi c}{a} t + \beta' \sin \frac{n\pi c}{a} t\right)$$

avec $(\alpha', \beta', \beta) \in \mathbb{R}^3$.

Le cas $f = 0$ correspond à $\beta = 0$ d'où les solutions stationnaires vérifiant les conditions aux limites $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(0,t) = f(a,t) = 0$ sont définies par (1) ci-dessus.